Mengenlehre

Als Menge wird in der Mathematik ein abstraktes Objekt bezeichnet, das aus der Zusammenfassung einer Anzahl einzelner Objekte hervorgeht. Diese werden dann als die Elemente der Menge bezeichnet.

Gesetze der Mengenalgebra	
Idempotenz	
1a) $A \cup A = A$	1b) $A \cap A = A$
Assoziativgesetz	
2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Kommutativgesetz	
3a) $A \cup B = B \cup A$	3b) $A \cap B = B \cap A$
Distributivgesetz	
4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identitätsgesetz	
5a) $A \cup \emptyset = A$	5b) $A \cap U = A$
6a) $A \cup U = U$	6b) $A \cap \emptyset = \emptyset$
Gesetz vom doppelten Komplement	
7) $(A^c)^c = A$	
Komplemente	
8a) $A \cup A^c = U$	8b) $A \cap A^c = \emptyset$
9a) $U^c = \emptyset$	9b) $\emptyset^c = U$
Gesetz von de Morgan	
10a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	10b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Mengen: Grossbuchstaben; A, B, C, ... Elemente: Kleinbuchstaben; a, b, c, ... $p \in A$ Negation: $p \notin A$

Aufschreibearten

Alle Elemente auflisten: $A = {a, b, c, x, y, z}$ $B = {1,2,3,4}$ $C={1,2,a,b,c}$

Eigenschaften festlegen: $B={n:n \in \mathbb{Z} \land n > 5 }$ B ist die Menge der Elemente n; wofür gilt, n ist eine ganze Zahl grösser als 5.

Extensionalitätaxiom

Zwei Mengen A und B enthalten selbe Elemente. $A=B$ Negation: $A \not = B$

Leere Mengen

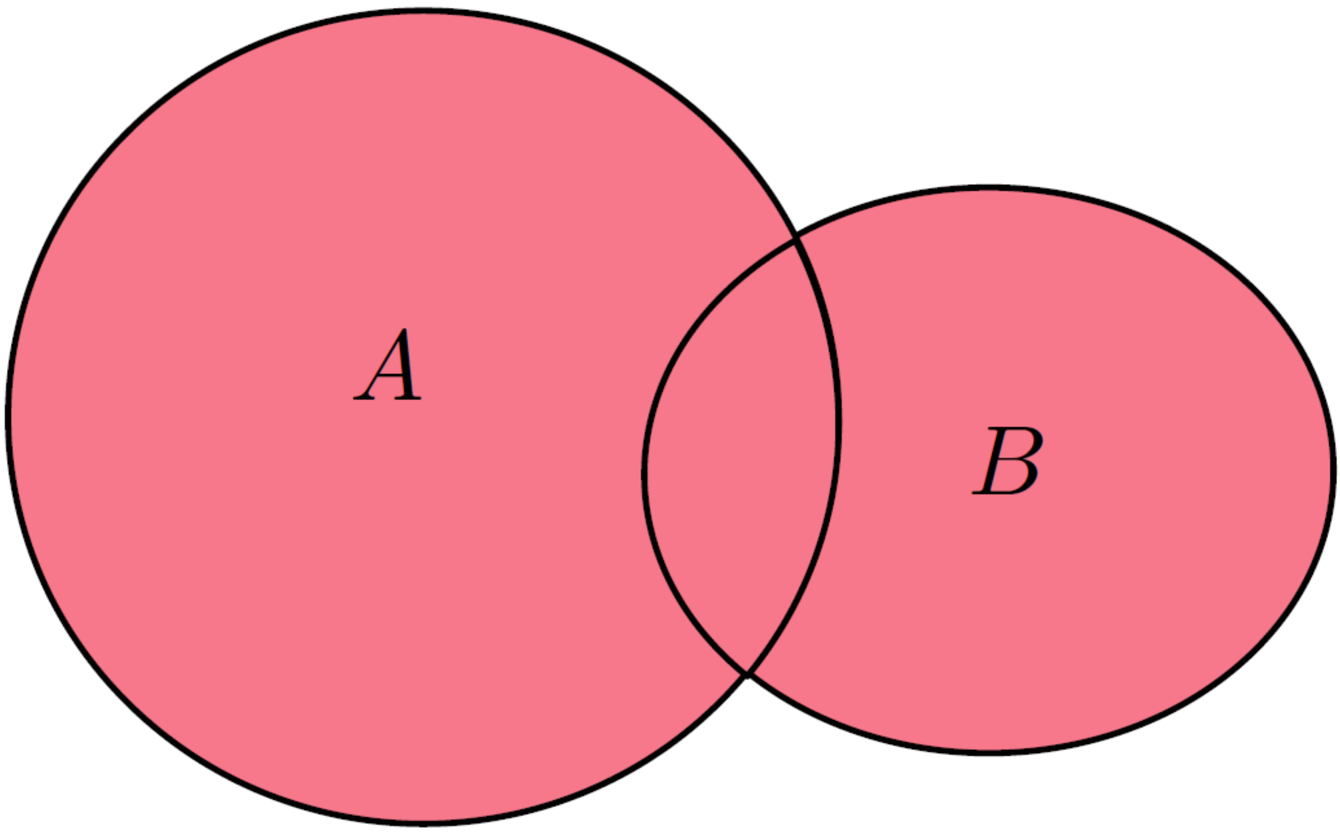
Bezechnung: $\emptyset$ ${ }$ Elemente der betrachteten Menge => Universalmenge

Teilmengen

A & B sind zwei Mengen Wenn alle Elemente von A auch in Element B: $A \subseteq B$ Falls keine Teilmenge: $A \not \subseteq B$

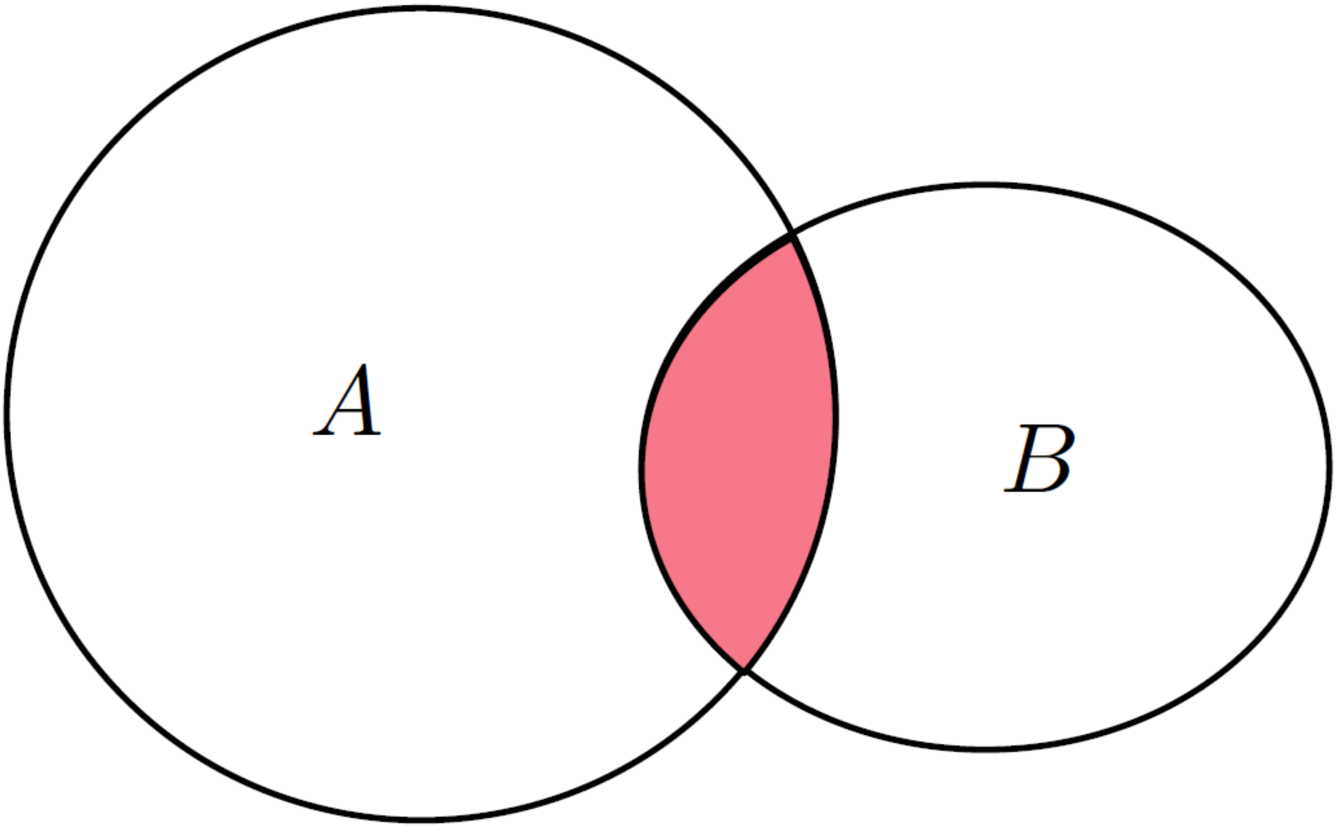
Vereinigung

Alle Elemente von A und B: $A \cup B$ $A \cup B := { x:x \in A \lor x \in B } $



Durchschnitt

Nur Elemente in beiden Mengen: $A\cap B$ $A \cap B := {x:x \in A \lor x \in B}$

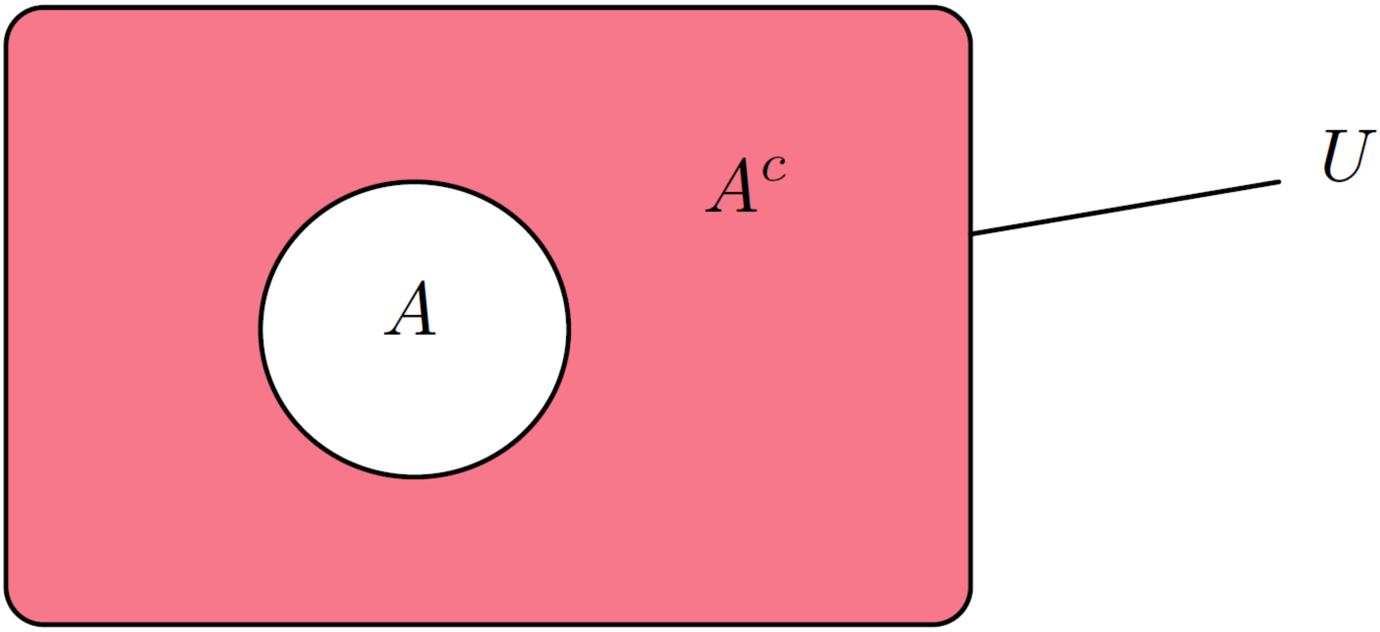


Disjunktion

Wenn der Durchschnitt zweier Mengen A und B leer ist: $A \cap B = \emptyset$

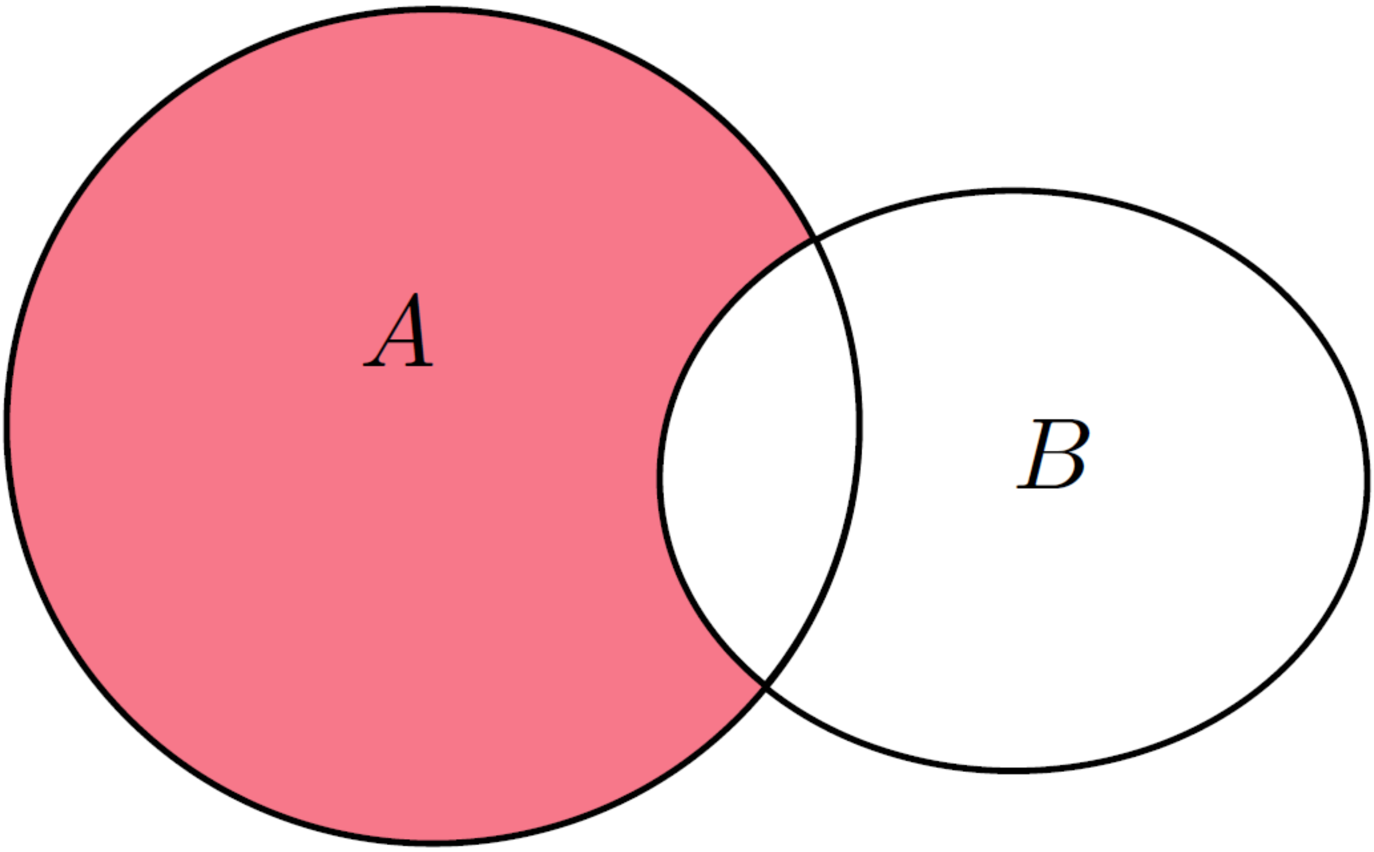
Komplement

$A \subseteq U$ kann auch als A^C geschrieben werden $A^C := { x:x \in U \lor x \not \in A }$



Differenz

Wenn Differenz zwischen A und B ist alles in A, was nicht zu B gehört: $A \backslash B$ $A \backslash B := {x:x \in A \land x \not \in B}$ [



] (https://docs.lucanoahcaprez.ch/uploads/images/gallery/2023-10/pasted-image-

20231024102640.png)

Potenzmenge

Alle Teilmengen eines Mengensystems: S = {1, 2} $P(S) = { \emptyset, {1}, {2}, {1,2} }$ N Elemente enthalten: 2^n Elemente.

Partition

Aufteilung in nicht leere Teilmengen, zB. Partition A von S -> ${A_{i}}$. Dabei gilt:

- Teilmengen A_{i} verschieden von $\emptyset$
- Alle A_{i} ergeben S
- Paarweise disjunktiv; $A_{i} \cap A_:{j} = \emptyset$, falls $i \not = j$

Geordnete Paare

Bei Elementen einer Menge spielt die Reihenfolge keine Rolle: ${a,b} = {b,a}$ Bei geordneten Paaren hingegen gilt die Reihenfolge zwingen. $(a, b) = (c, d)$ Diese sind nur dann gleich wenn: a = c und b = d

Kartesisches Produkt

Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in A$ und $y \in B$. Bezeichnung: $A \times B$ $A \times B := {(x,y): x \in A \land y \in B}$

n-Tupel

Bestehend aus n geordneten Elementen $(a_{1}, a_{2}, a_{c}, \dots, a_{n})$ Zwei n-Tupel sind genau dann gleich: $a_{1}=b_{1} \land a_{2} = b_{2} \land a_{3} = b_{3} \land \dots \land a_{n} = b_{n}$ Bei folgenden Mengen $A_{1}, A_{2}, ... ,A_{n}$ bezeichnen Mengen aller n-Tupel $(a_{1}, b_{2}, ..., c_{n})$ mit der folgenden Eigenschaft $a_{1} \in A_{1}, a_{2} \in A_{2}, ..., a_{n} \in A_{n}$ diese Menge $A_{1} \times A_{2} \times ... \times A_{n}$

Endliche Mengen

Endlich bedeutet, dass die Menge m (natürliche Zahl) verschiedene Elemente hat. Anderfalls ist die Menge unendlich. Bezeichnung der Anzahl Elemente der Mengen: $|A|$ Wenn A und B endliche Mengen sind, dann ist $A \cup B$ ebenfalls enldich: $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$

Einschluss-Ausschluss-Formeln

Im Fall von $k = 3$ endlichen Mengen A, B und C lautet die Formel:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \; . \tag{4}$$

Im Fall von $k = 4$ endlichen Mengen A, B, C und D lautet die Formel:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| \;\; = \;\; & |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| \\ & - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| \\ & + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D| \end{aligned}$$

Revision #14
Created 24 October 2023 08:16:56 by Luca Noah Caprez
Updated 25 October 2023 06:33:53 by Luca Noah Caprez