

# Aussagenlogik

In der Aussagenlogik versteht man unter einer Aussage einen sprachlichen oder formalen Ausdruck, dem man genau einen der beiden möglichen Wahrheitswerte (w: wahr, f: falsch) zuordnen kann.

Gesetze der Aussagenlogik	
<b>Idempotenz</b>	
1a) $A \wedge A \equiv A$	1b) $A \vee A \equiv A$
<b>Assoziativgesetz</b>	
2a) $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$	2b) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
<b>Kommutativgesetz</b>	
3a) $A \wedge B \equiv B \wedge A$	3b) $A \vee B \equiv B \vee A$
<b>Distributivgesetz</b>	
4a) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	4b) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
<b>Identitätsgesetz</b>	
5a) $A \wedge F \equiv F$	5b) $A \vee T \equiv T$
6a) $A \wedge T \equiv A$	6b) $A \vee F \equiv A$
<b>Gesetz der doppelten Verneinung</b>	
7) $\neg(\neg A) \equiv A$	
<b>Komplemente</b>	
8a) $A \wedge \neg A \equiv F$	8b) $A \vee \neg A \equiv T$
9a) $\neg T \equiv F$	9b) $\neg F \equiv T$
<b>Gesetz von de Morgan</b>	
10a) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	10b) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

## Konjunktion

Nur W - W ist wirklich wahr.

$A$	$B$	$A \wedge B$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$f$
$f$	$f$	$f$

## Disjunktion

Nur F - F ist wirklich falsch.

$A$	$B$	$A \vee B$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$w$
$f$	$w$	$w$
$f$	$f$	$f$

# Antivalenz / XOR

Nur dann wahr, wenn nur eins von  $A \oplus B$  richtig ist

A	B	$A \oplus B$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

# Negation

$A$	$\neg A$
$w$	$f$
$f$	$w$

Zusammengesetzte Aussagen:

$A$	$B$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
$w$	$w$	$f$	$f$	$w$
$w$	$f$	$w$	$w$	$f$
$f$	$w$	$f$	$f$	$w$
$f$	$f$	$w$	$f$	$w$

## Disjunktive Normalform

Wahrheitstabelle zu Aussage aufschlüsseln. Jede Teilaussage muss dabei wahr sein und kann dann mit den anderen Teilaussagen über eine Disjunktion verknüpft werden.

## Kanonisch disjunktive Normalform

Jede Variable kommt genau einmal vor.

## Tautologien

Wenn alle Werte der Aussage wahr sind, unabhängig von den Werten der Variablen.

$A$	$\neg A$	$A \vee \neg A$
$w$	$f$	$w$
$f$	$w$	$w$

## Kontradiktionen

Wenn egal welcher Wert die Variablen haben, die Aussage immer Falsch ist.

$A$	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$f$

## Logische Äquivalenz

Wenn zwei Aussagen die exakt gleiche Wahrheitstabelle haben.  $P(A, B, \dots) \equiv Q(A, B, \dots)$

## Implikation

Ein Element verursacht ein anderes. Wenn A dann folgt B.

 [Pasted image 20231015132040.png](#)

# Zusammenhang

Wirkung zwischen Implikation, Umkehrung und Kontraposition.

$A$	$B$	Implikation $A \Rightarrow B$	Umkehrung $B \Rightarrow A$	Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$
$w$	$w$	$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$	$w$	$f$
$f$	$w$	$w$	$f$	$w$
$f$	$f$	$w$	$w$	$w$

# Äquivalenz

Gegenseitige Implikation der Inhalte.

$A$	$B$	$A \iff B$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$f$
$f$	$f$	$w$

## Andere Schreibweise

$$A \iff B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

# Aussageformen

## Zahlenmenge

- Menge der natürlichen Zahlen:  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ .
- Menge der ganzen Zahlen:  $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .
- Menge der rationalen Zahlen:  $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$ .
- Menge der reellen Zahlen:  $\mathbb{R}$ .

## Operanden

$x \in \mathbb{R}$  -> Definitionsbereich der Variable x.  $3|n$  -> n ist ein Teiler von 3.

## Quantoren

$\forall$  -> Allquantor für alle Elemente.  $\exists$  -> Existiert mindestens ein Element.

## Negation Existenzaussage

$\exists x \in D : P(x) \equiv \forall x \in D : \neg P(x)$  Entsprechend kann es so umgekehrt werden:  
 $\neg(\exists x \in D : P(x)) \equiv \forall x \in D : \neg P(x)$

## Negation Allaussage

$\neg(\forall x \in D: P(x)) \equiv \exists x \in D: \neg P(x)$

# Beweistechniken

## Indirekter Beweis

Implikation ist logisch äquivalent zu Kontraposition:  $A \implies B \equiv \neg B \implies \neg A$   
Manchmal einfacher zum Beweisen ist die Kontraposition.

## Beweis durch Widerspruch

Hypothese:  $\neg A \implies B$

Ergibt einen Widerspruch mit der wahren Aussage:  $\neg A \implies \neg B$

# Aussagenlogik vs Mengenlehre

Aussage:  $x \in A$

Mengenangabe:  $A \cap B$

---

Revision #4

Created 25 October 2023 06:34:07

Updated 21 July 2024 15:11:16