Aussagenlogik

In der Aussagenlogik versteht man unter einer Aussage einen sprachlichen oder formalen Ausdruck, dem man genau einen der beiden möglichen Wahrheitswerte (w: wahr, f: falsch) zuordnen kann.

Gesetze der Aussagenlogik	
Idempotenz	
1a) $A \wedge A \equiv A$	1b) $A \vee A \equiv A$
Assoziativgesetz	
2a) $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$	2b) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
Kommutativgesetz	
3a) $A \wedge B \equiv B \wedge A$	3b) $A \vee B \equiv B \vee A$
Distributivgesetz	
4a) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	4b) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Identitätsgesetz	
5a) $A \wedge F \equiv F$	5b) $A \vee T \equiv T$
6a) $A \wedge T \equiv A$	6b) $A \vee F \equiv A$
Gesetz der doppelten Verneinung	
7) $\neg(\neg A) \equiv A$	
Komplemente	
8a) $A \wedge \neg A \equiv F$	8b) $A \vee \neg A \equiv T$
9a) $\neg T \equiv F$	9b) $\neg F \equiv T$
Gesetz von de Morgan	
10a) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	10b) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

Konjunktion

Nur W - W ist wirklich wahr.

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Disjunktion

Nur F - F ist wirklich falsch.

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Antivalenz / XOR

Nur dann wahr, wenn nur eins von $A \oplus B$ richtig ist

A	B	$A \oplus B$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Negation

A	$\neg A$
w	f
f	w

Zusammengesetzte Aussagen:

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
w	w	f	f	w
w	f	w	w	f
f	w	f	f	w
f	f	w	f	w

Disjunktive Normalform

Wahrheitstabelle zu Aussage aufschlüsseln. Jede Teilaussage muss dabei wahr sein und kann dann mit den anderen Teilaussagen über eine Disjunktion verknüpft werden.

Kanonisch disjunktive Normalform

Jede Variable kommt genau einmal vor.

Tautologien

Wenn alle Werte der Aussage wahr sind, unabhängig von den Werten der Variablen.

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
w	f	w
f	w	w

Kontradiktionen

Wenn egal welcher Wert die Variablen haben, die Aussage immer Falsch ist.

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
w	f	f
f	w	f

Logische Äquivalenz

Wenn zwei Aussagen die exakt gleiche Wahrheitstabelle haben. P(A, B, ...) $\equiv$ Q(A, B, ...)

Implikation

Ein Element verursacht ein anderes. Wenn A dann folgt B.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Zusammenhang

Wirkung zwischen Implikation, Umkehrung und Kontraposition.

A	B	Implikation $A \Rightarrow B$	Umkehrung $B \Rightarrow A$	Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	w
f	f	w	w	w

Äquivalenz

Gegenseitige Implikation der Inhalte.

A	B	$A \iff B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Andere Schreibweise

$$A \iff B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Aussageformen

Zahlenmenge

- Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
- Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} := \{\ldots, -3 - 2 - 1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \land q \neq 0\}$.
- Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R}$.

Operanden

x $\in$ $\mathbb{R}$ -> Definitionsbereich der Variable x. 3|n -> n ist ein Teiler von 3.

Quantoren

$\forall$ -> Allquantor für alle Elemente. $\exists$ -> Existiert mindestens ein Element.

Negation Existentaussage

$\exists x \in D : P(x) \equiv \forall x \in D: \lnot P(x)$ Entsprechend kann es so umgekehrt werden: $\lnot(\exists x \in D : P(x)) \equiv \forall x \in D: \lnot P(x)$

Negation Allaussage

$\lnot(\forall x \in D: P(x)) \equiv \exists x \in D: \lnot P(x)$

Beweistechniken

Indirekter Beweis

Implikation ist logisch äquivalent zu Kontraposition: $A \implies B \equiv \lnot B \implies \lnot A$ Manchmal einfacher zum Beweisen ist die Kontraposition.

Beweis durch Widerspruch

Hypothese: $\lnot A \implies B$
Ergibt einen Wirderspurch mit der wahren Aussage: $\lnot A \implies \lnot B$

Aussagenlogik vs Mengenlehre

Aussage: $x \in A$

Mengenangabe: $A \cap B$

Revision #4
Created 2023-10-25 06:34:07 UTC
Updated 2024-07-21 15:11:16 UTC